

# 第1讲 圆的三大定理加油站

## 一、垂径定理

### 练习1

#### 1. 2020~2021学年12月天津南开区天津市南开翔宇学校初三上学期月考第7题 ★★

下列判断正确的是（ ）.

- A. 平分弦的直线垂直于弦
- B. 平分弧的直线必定平分这条弧所对的弦
- C. 弦的中垂线必平分弦所对的两条弧
- D. 平分弦的直线必平分弦所对的两条弧

【答案】 C

【解析】 A选项：平分弦（非直径）的直径垂直于弦，故 A错误；

B选项：平分弧的直径必定平分这条弧所对的弦，故 B错误；

C选项：弦的中垂线必平分弦所对的两条弧，符合垂径定理，故 C正确；

D选项：平分弦（非直径）的直径必平分弦所对的两条弧，故 D错误.

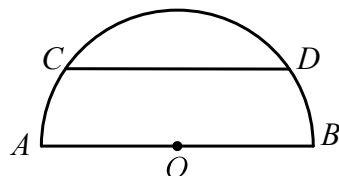
故选 C.

【标注】 【知识点】 垂径定理以及应用

### 练习2

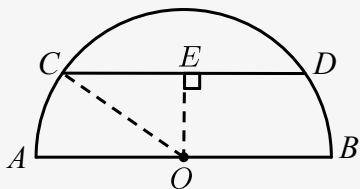
#### 2. 2020~2021学年9月湖南长沙岳麓区湖南师大附中博才实验中学初三上学期月考第16题 ★★★

如图，已知  $AB$  是半圆  $O$  的直径，弦  $CD \parallel AB$ ， $CD = 8$ ， $AB = 10$ ，则  $CD$  与  $AB$  之间的距离是 \_\_\_\_\_ .



【答案】 3

【解析】 如图，过点  $O$  作  $OE \perp CD$  交  $CD$  于  $E$ ，连接  $CO$ ，

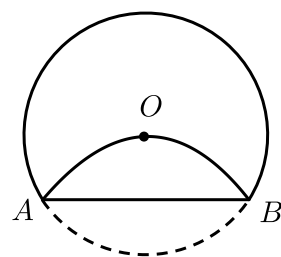


$\because AB$ 为直径,  $AB = 10$ ,  
 $\therefore AO = CO = \frac{1}{2}AB = 5$ ,  
 $\because OE \perp CD$ ,  $CD = 8$ ,  
 $\therefore CE = ED = \frac{1}{2}CD = 4$ ,  
 $\therefore$ 在  $\text{Rt}\triangle COE$ 中,  $EO = \sqrt{CO^2 - CE^2} = 3$ ,  
 $\therefore CD$ 与  $AB$ 之间距离为 3.

**【标注】**【知识点】垂径定理以及应用

3. 2017~2018学年9月天津南开区南开大学附属中学初三上学期月考第6题3分 ★★★

如图, 将半径为 2cm 的圆形纸片折叠后, 圆弧恰好经过圆心  $O$ , 则折痕  $AB$  的长为 ( ).



A. 2cm

B.  $\sqrt{3}$ cm

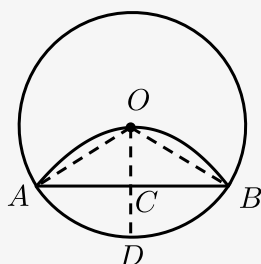
C.  $2\sqrt{3}$ cm

D.  $2\sqrt{5}$ cm

**【答案】** C

**【解析】** 过点  $O$  作  $AB$  的垂线,

交  $AB$  于点  $C$  交圆于点  $D$ , 连接  $OA$ ,  $OB$ ,



由题意知:  $OC = CD = \frac{1}{2}OD$ ,

$\because OD = OA = 2$ ,

$\because OC \perp AB$ ,

$\therefore \angle OCA = 90^\circ$ ,

$\therefore OC^2 + AC^2 = OA^2$ ,

$$\therefore 1 + AC^2 = 4 ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{3} ,$$

$$\therefore AC = BC ,$$

$$\therefore AB = 2AC = 2\sqrt{3}\text{cm} .$$

故选 C .

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

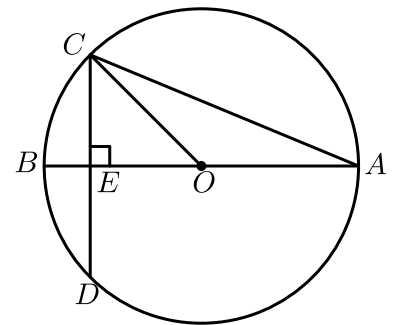
【知识点】勾股定理

【知识点】轴对称的性质

【能力】运算能力

4. 2019~2020学年陕西西安长安区陕西师范大学万科中学初三上学期期末第9题3分 ★★

如图， $\odot O$  的直径  $AB$  垂直于弦  $CD$ ，垂足是  $E$ ， $\angle A = 22.5^\circ$ ， $OC = 4$ ， $CD$  的长为（ ）.



A.  $2\sqrt{2}$

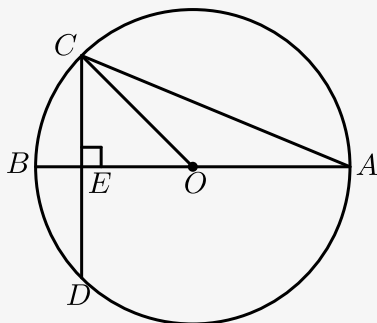
B.  $4\sqrt{2}$

C. 4

D. 8

【答案】B

【解析】



$$\therefore \angle A = 22.5^\circ ,$$

$$\therefore \angle BOC = 2\angle A = 45^\circ ,$$

$\therefore \odot O$  的直径  $AB$  垂直于弦  $CD$  ,

$\therefore CE = DE$  ,  $\triangle OCE$  为等腰直角三角形 ,

$$\therefore CE = \frac{\sqrt{2}}{2} OC = 2\sqrt{2} ,$$

$$\therefore CD = 2CE = 4\sqrt{2} .$$

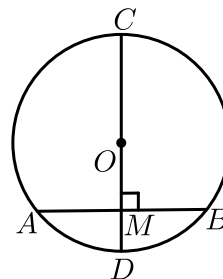
故选 B .

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

【知识点】圆周角定理以及应用

5. 2010~2011学年北京东城区初三上学期期末第4题 ★★

如图，在 $\odot O$ 中， $CD$ 是直径， $AB$ 是弦， $AB \perp CD$ 于 $M$ ， $AB = 8$ ， $OC = 5$ ，则 $MD$ 的长为（ ）。



A. 4

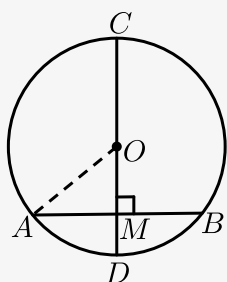
B. 2

C.  $\sqrt{2}$

D. 1

【答案】B

【解析】连接 $OA$ ，



$\because CD$ 是直径， $AB$ 是弦， $AB \perp CD$ 于 $M$ ， $AB = 8$ ，

$\therefore AM = BM = 4$ 。

$\because OC = 5$ ，

$\therefore OA = OD = 5$ 。

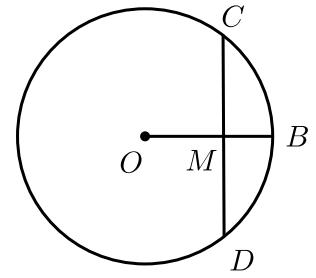
$\therefore OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ 。

$\therefore DM = OD - OM = 5 - 3 = 2$ 。

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

6. 2019~2020学年天津河东区初三上学期期末第4题3分 ★★

如图，已知 $OB$ 为 $\odot C$ 的半径，且 $OB = 10\text{cm}$ ，弦 $CD \perp OB$ 于 $M$ ，若 $OM : MB = 4 : 1$ ，则 $CD$ 长为（ ）。



A. 3cm

B. 6cm

C. 12cm

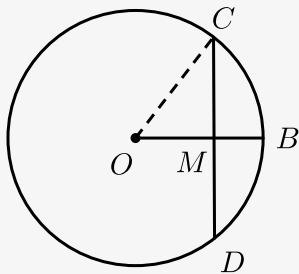
D. 24cm

**【答案】** C

**【解析】**  $\because OB = 10, OM : MB = 4 : 1,$

$\therefore OM = 8, MB = 2,$

连接  $OC$ , 则  $OC = OB = 10,$



$\because CD \perp DB,$

$\therefore CM = DM,$

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle OCM$  中,

$$CM = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$$

$\therefore CD = 2CM = 12.$

故选 C.

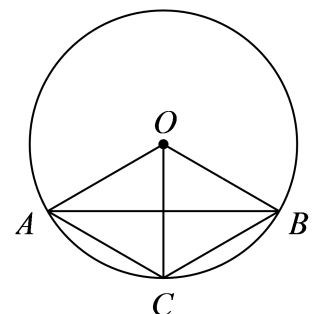
**【标注】** 【知识点】 勾股定理

【知识点】 垂径定理以及应用

【知识点】 圆与勾股

7. 2017~2018学年12月天津河西区天津市新华中学初三上学期月考第9题3分 ★★

如图所示, 圆  $O$  的弦  $AB$  垂直平分半径  $OC$ , 则四边形  $OACB$  ( ).



A. 是正方形

B. 是长方形

C. 是菱形

D. 以上答案都不对

【答案】 C

【解析】 由垂径定理知， $OC$ 垂直平分 $AB$ ，  
即 $OC$ 与 $AB$ 互相垂直平分，  
所以四边形 $OACB$ 是菱形．  
故选 C．

【标注】 【知识点】 垂径定理以及应用

【知识点】 菱形的判定-从四边形

【能力】 推理论证能力

8. 2015~2016学年11月广东广州越秀区广州大学附属中学初三上学期月考第6题3分 ★★

已知 $\odot O$ 的半径为5，直线 $l$ 与 $\odot O$ 相交，点 $O$ 到直线 $l$ 的距离是2，则 $\odot O$ 上到直线 $l$ 的距离为3的点数是（ ）个．

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 C

【解析】 将直线 $l$ 分别向上和下平移，得直线 $m$ 、 $n$ 过圆心 $O$ 作 $m$ 的垂线，  
交 $m$ 于 $A$ 点，交 $l$ 于点 $B$ ；

过 $O$ 作 $n$ 的垂线，交 $n$ 于点 $G$ ．由题意得

①对于 $m$ 与 $l$ 来说 $OB = 2$ ， $AB = 3$ ，

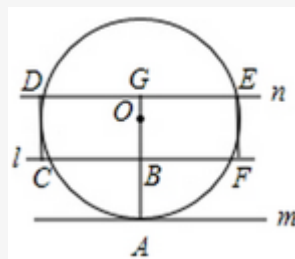
则 $OA = OB + AB = 2 + 3 = 5$ ，即 $m$ 与圆 $O$ 相切．  
有一个交点．

②对于 $n$ 与 $l$ 来说 $OB = 2$ ， $BG = 3$ ，

则 $OG = BG - OB = 3 - 2 = 1$ ， $\because 1 < 5$ ， $\therefore n$ 与圆 $O$ 相交，且有两个交点．

$\therefore \odot O$ 上到直线 $l$ 的距离为3的点的个数是3个．

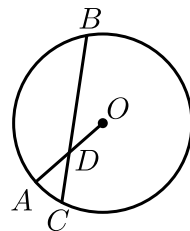
故选 C．



【标注】 【知识点】 直线和圆的位置关系

9. 2018~2019学年山东临沂兰陵县初三上学期期末第7题3分 ★★

如图， $\odot O$ 的半径 $OA = 4$ ，弦 $BC$ 经过 $OA$ 的中点 $D$ ， $\angle ADC = 30^\circ$ ，则弦 $BC$ 的长为（ ）．



A. 7

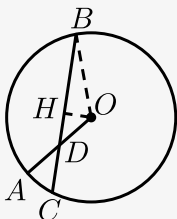
B.  $2\sqrt{15}$

C.  $4\sqrt{3}$

D.  $2\sqrt{17}$

**【答案】** B

**【解析】** 如图，作  $OH \perp BC$  于  $H$ ，连接  $OB$ ，



$\because$  点  $D$  是  $OA$  的中点，

$\therefore OD = \frac{1}{2}OA = 2$ ， $\angle ODH = \angle ADC = 30^\circ$ ，

$\therefore OH = \frac{1}{2}OD = 1$ ，由勾股定理得， $BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{15}$ ，

$\therefore OH \perp BC$ ，

$\therefore BC = 2BH = 2\sqrt{15}$ 。

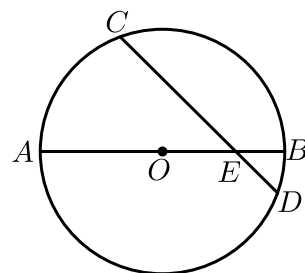
故选 B。

**【标注】** 【知识点】垂径定理以及应用

10. 2020~2021学年10月江苏南京秦淮区南京市第一中学初中部初三上学期月考第15题2分 ★★

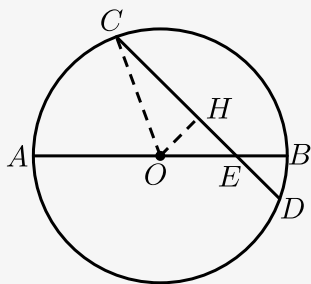
如图所示， $AB$ 为圆  $O$  的直径，弦  $CD$  交  $AB$  于  $E$ ，已知  $OE = 2$ ， $BE = 1$ ， $\angle AEC = 45^\circ$ ，则  $CD =$

\_\_\_\_\_。



**【答案】**  $2\sqrt{7}$

**【解析】** 作  $OH \perp CD$  于  $H$ ，连接  $OC$ 。



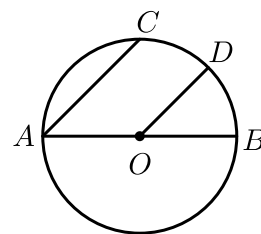
$\because OH \perp CD$  ,  
 $\therefore CH = DH$  ,  $\angle OHE = 90^\circ$  ,  
 $\because \angle OEH = 45^\circ$  ,  $OE = 2$  ,  
 $\therefore OH = HE = \sqrt{2}$  ,  
 $\because OC = OB = 3$  ,  
 $\therefore CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{7}$  ,  
 $\therefore CD = 2CH = 2\sqrt{7}$  ,  
 故答案为  $2\sqrt{7}$  .

**【标注】**【知识点】垂径定理以及应用

**【能力】**推理论证能力

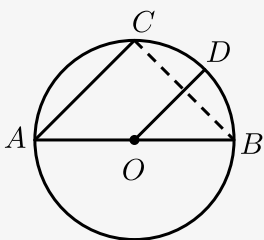
11. 2018~2019学年北京通州区初三上学期期末第18题6分 ★★★

已知：如图， $AB$ 为 $\odot O$ 的直径， $OD \parallel AC$ ，求证：点 $D$ 平分 $\widehat{BC}$ 。



**【答案】**证明见解析。

**【解析】**方法一：连接 $CB$ ，



$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，  
 $\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，  
 $\because OD \parallel AC$ ，



$\therefore OD \perp CB$ ,

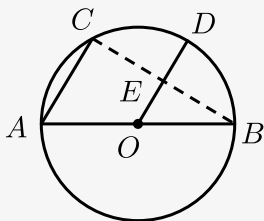
$\therefore$ 点  $D$  平分  $\widehat{BC}$ ,

另证：可以连接  $OC$  或  $AD$  .

方法二：连接  $CB$ ， $\because AB$  为  $\odot O$  的直径， $\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ， $\because OD \parallel AC$ ， $\therefore$

$\angle OEB = \angle ACB = 90^\circ$ ，

即  $OD \perp BC$ ， $\because OD$  过  $O$ ， $\therefore D$  平分  $\widehat{BC}$  .



**【标注】** 【知识点】平行线的性质

【知识点】垂径定理以及应用

【知识点】弧、弦、圆心角关系

【知识点】圆周角定理以及应用

【能力】推理论证能力

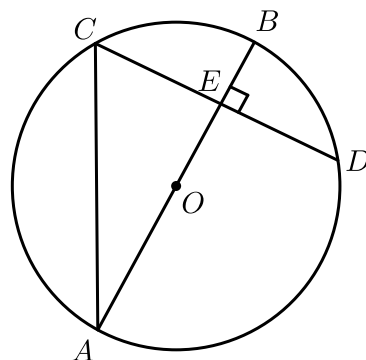
【思想】转化与化归思想

【思想】数形结合思想

### 练习3

#### 12. 2013年天津红桥区初三中考一模第14题3分 ★★

如图， $AB$  是  $\odot O$  的直径，弦  $CD \perp AB$ ，垂足为  $E$ ，若  $CD = 2\sqrt{2}$ ， $CA = \sqrt{6}$ ，则直径  $AB$  的长为 \_\_\_\_\_ .



**【答案】** 3

**【解析】**  $\because AB$  是  $\odot O$  的直径，弦  $CD \perp AB$ ，垂足为  $E$ ， $CD = 2\sqrt{2}$ ，

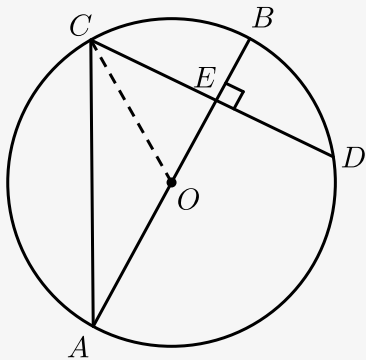
$\therefore CE = \sqrt{2}$ ，

在  $\text{Rt}\triangle ACE$  中 ,

$$\because CE = \sqrt{2}, CA = \sqrt{6},$$

$$\therefore AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2,$$

连接  $OC$  , 设此圆的半径为  $x$  ,



则  $OE = 2 - x$  ,

在  $\text{Rt}\triangle OCE$  中 ,  $OC^2 = CE^2 + OE^2$  , 即  $x^2 = (\sqrt{2})^2 + (2 - x)^2$  ,

$$\text{解得 } x = \frac{3}{2} .$$

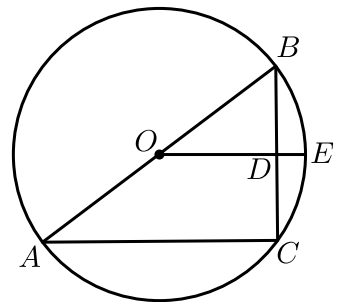
$$\therefore AB = 2x = 2 \times \frac{3}{2} = 3 .$$

故答案为 : 3 .

**【标注】**【知识点】垂径定理以及应用

13. 2017~2018学年12月内蒙古赤峰翁牛特旗乌丹第六中学初三上学期月考第15题3分 ★★

如图 ,  $AB$  是  $\odot O$  的直径 ,  $BC$  是弦 , 点  $E$  是  $\widehat{BC}$  的中点 ,  $OE$  交  $BC$  于点  $D$  . 连接  $AC$  , 若  $BC = 6$  ,  $DE = 1$  , 则  $AC$  的长为 \_\_\_\_\_ .

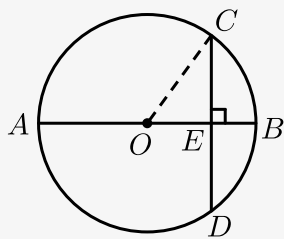


**【答案】** 8

**【解析】** 连接  $OC$  , 如图所示 .



【解析】连接  $OC$  ,



$\because AB$  为  $\odot O$  的直径 ,  $AB \perp CD$  ,

$$\therefore CE = DE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 6 = 3 ,$$

设  $\odot O$  的半径为  $x$  ,

则  $OC = x$  ,  $OE = OB - BE = x - 1$  ,

在  $\text{Rt}\triangle OCE$  中 ,  $OC^2 = OE^2 + CE^2$  ,

$$\therefore x^2 = 3^2 + (x - 1)^2 ,$$

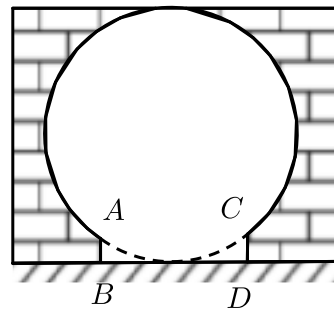
解得 :  $x = 5$  ,

$\therefore \odot O$  的半径为 5 .

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

15. 2017~2018学年天津河西区初三上学期期末第11题3分 ★★

图是“明清影视城”的一扇圆弧形门，小红到影视城游玩，他了解到这扇门的相关数据：这扇圆弧形门所在的圆与水平地面是相切的， $AB = CD = 0.25$ 米， $BD = 1.5$ 米，且  $AB$ 、 $CD$  与水平地面都是垂直的．根据以上数据，请你帮小红计算出这扇圆弧形门的最高点离地面的距离是（ ）．



A. 2米

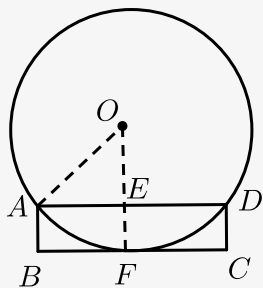
B. 2.5米

C. 2.4米

D. 2.1米

【答案】B

【解析】如图，连接  $OF$  ,  $OA$  , 交  $AD$  于点  $E$  ,



$\because BC$ 是圆  $O$  的切线，

$\therefore OF \perp BC$  .

$\because$  四边形  $ABCD$  是矩形，

$\therefore EF = AB$  ,

设圆  $O$  的半径为  $R$  ,

$\therefore AE = \frac{BC}{2}$  .

$OE = R - EF$  .

在  $\text{Rt}\triangle OEA$  中，

$AE^2 + OE^2 = OA^2$  .

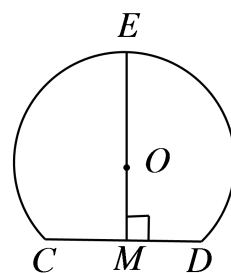
解得  $R = 1.25$  米 .

$1.25 \times 2 = 2.5$  米 .

**【标注】**【知识点】垂径定理以及应用

16. 2017~2018学年11月广东深圳福田区深圳实验学校初中部初三上学期月考第15题3分 ★★★

如图， $EM$  经过圆心  $O$ ， $EM \perp CD$  于  $M$ ，若  $CD = 4$ ， $EM = 6$ ，则弧  $CED$  所在圆的半径为 \_\_\_\_\_ .



**【答案】**  $\frac{10}{3}$

**【解析】** 连接  $OC$ ，设弧  $CED$  所在圆的半径为  $R$ ，

则  $OC = R$ ， $OM = 6 - R$ ，

根据垂径定理求出  $CM$ ，根据勾股定理得出方程，求出即可 .

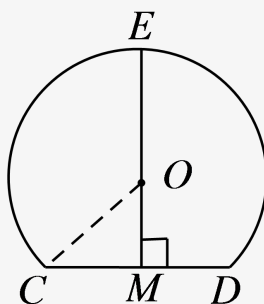
$\because EM$  经过圆心  $O$ ， $EM \perp CD$  于  $M$ ， $CD = 4$ ，

$\therefore CM = DM = 2$ ，

在  $\text{Rt}\triangle OMC$  中，由勾股定理得：

$$OC^2 = OM^2 + CM^2,$$

$$R^2 = (6 - R)^2 + 2^2, \quad R = \frac{10}{3}.$$

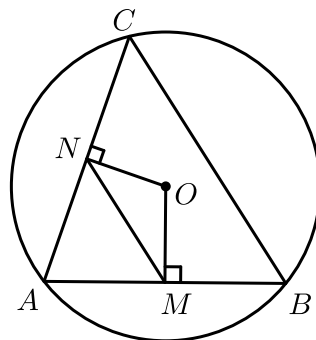


【标注】【知识点】垂径定理以及应用

#### 练习4

#### 17. 2020~2021学年10月浙江杭州滨江区浙江省杭州滨和中学初三上学期月考第7题3分 ★★

如图，已知  $AB$ 、 $AC$  都是  $\odot O$  的弦， $OM \perp AB$ ， $ON \perp AC$ ，垂足分别为  $M$ ， $N$ ，若  $MN = \sqrt{5}$ ，那么  $BC$  等于（ ）。



A. 5

B.  $\sqrt{5}$

C.  $2\sqrt{5}$

D.  $\sqrt{10}$

【答案】C

【解析】 $\because AB$ 、 $AC$  都是  $\odot O$  的弦， $OM \perp AB$ ， $ON \perp AC$ ，垂足分别为  $M$ 、 $N$ ，

$\therefore M$ 、 $N$  分别是  $AB$ 、 $AC$  的中点，

$\therefore MN$  是  $\triangle ABC$  的中位线，

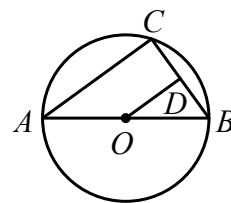
$\therefore BC = 2MN = 2\sqrt{5}$ 。

故选 C。

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

#### 18. 2020年陕西西安新城区西光中学初三中考一模第9题3分 ★★

如图， $AB$  是  $\odot O$  的直径， $C$  是  $\odot O$  上一点， $OD \perp BC$  于点  $D$ ， $AC = 4$ ，则  $OD$  的长为（ ）。



A. 1

B. 1.5

C. 2

D. 2.5

**【答案】** C

**【解析】**  $\because OD \perp BC$ ,

$\therefore CD = BD$ ,

$\because OA = OB$ ,  $AC = 4$ ,

$\therefore OD = \frac{1}{2}AC = 2$ .

故选 C.

**【标注】**【知识点】垂径定理以及应用

### 练习5

19.

2020~2021学年12月四川成都锦江区成都嘉祥外国语学校（锦江校区）初三上学期周测A卷第5题3分

★★★

圆的半径为 13cm，两弦  $AB \parallel CD$ ， $AB = 24\text{cm}$ ， $CD = 10\text{cm}$ ，则两弦  $AB$ ， $CD$  的距离是（ ）.

A. 7cm

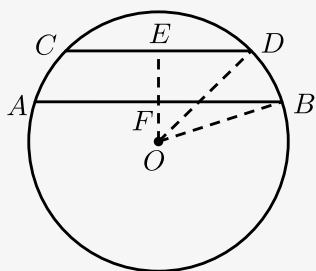
B. 17cm

C. 12cm或 7cm

D. 7cm或 17cm

**【答案】** D

**【解析】** 作  $OE \perp CD$ ,



$\because AB \parallel CD$ ,

$\therefore OE \perp AB$ ，当两弦在圆心的同侧时，

已知  $CD = 10\text{cm}$ ，

$\therefore$  由垂径定理得  $DE = 5\text{cm}$  .

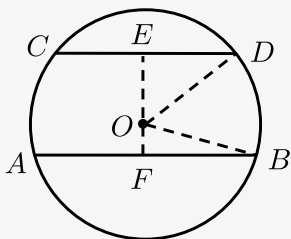
$\because OD = 13\text{cm}$ ，

∴利用勾股定理可得： $OE = 12\text{cm}$  .

同理可求  $OF = 5\text{cm}$  ,

∴  $EF = 7\text{cm}$  .

当两弦在圆心的两侧时 ,



$EF = OE + OF = 17\text{cm}$  .

故选 D .

**【标注】**【知识点】垂径定理以及应用

20. ★★

圆的半径为  $13\text{cm}$  , 两弦  $AB \parallel CD$  ,  $AB = 24\text{cm}$  ,  $CD = 10\text{cm}$  , 则两弦  $AB$ 、 $CD$  的距离是 ( ) .

A.  $6\text{cm}$  或  $17\text{cm}$

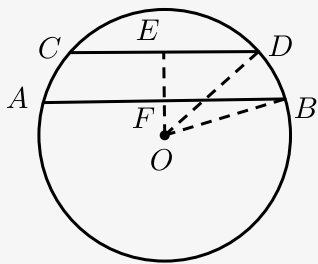
B.  $6\text{cm}$  或  $13\text{cm}$

C.  $7\text{cm}$  或  $17\text{cm}$

D.  $7\text{cm}$  或  $13\text{cm}$

**【答案】** C

**【解析】** 第一种情况：两弦在圆心的同侧时，过  $O$  作  $OE$  垂直  $CD$  于  $E$ ，作  $OF$  垂直  $AB$  于  $F$ ，连接  $OB$ 、 $OD$  .



已知  $CD = 10\text{cm}$  ,

∴由垂径定理得  $DE = 5\text{cm}$  .

∵  $OD = 13\text{cm}$  ,

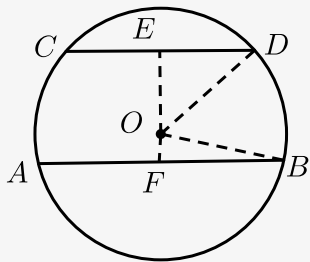
∴利用勾股定理可得： $OE = 12\text{cm}$  .

同理可求  $OF = 5\text{cm}$  ,

∴  $EF = OE - OF = 7\text{cm}$  .

第二种情况：两弦在圆心的异侧时，如图，同 ( 1 ) ,  $EF = OE + OF = 17\text{cm}$  .





∴两弦  $AB$ 、 $CD$  的距离是  $7\text{cm}$  或  $17\text{cm}$  .

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

21. 2014~2015学年江苏苏州工业园区初三上学期期中第16题3分 ★★

已知  $\odot O$  的半径  $OA$  为  $1$  . 弦  $AB$  的长为  $\sqrt{2}$  , 若在  $\odot O$  上找一点  $C$  , 使  $AC = \sqrt{3}$  , 则  $\angle BAC =$  \_\_\_\_\_  $^{\circ}$  .

【答案】  $75$  或  $15$

【解析】如图, 过点  $O$  作  $OE \perp AB$  ,  $OF \perp AC$  , 垂足分别为  $E$  ,  $F$  ,

$$\because AB = \sqrt{2} , AC = \sqrt{3} ,$$

$$\therefore \text{由垂径定理得} , AE = \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

$$AF = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$\because OA = 1 ,$$

$$\therefore \text{由勾股定理得} OE = \frac{\sqrt{2}}{2} , OF = \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore \angle BAO = 45^{\circ} ,$$

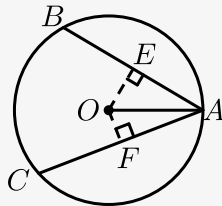
$$\therefore OF = \frac{1}{2} OA ,$$

$$\therefore \angle CAO = 30^{\circ} ,$$

$$\therefore \angle BAC = 75^{\circ} ,$$

当  $AB$ 、 $AC$  在半径  $OA$  同旁时,  $\angle BAC = 15^{\circ}$  .

故答案为:  $75$  或  $15$  .



【标注】【知识点】垂径定理以及应用

【知识点】圆与勾股

【思想】分类讨论思想

【能力】运算能力

22. ★★★

等腰  $\triangle ABC$  内接于半径为  $5$  的  $\odot O$  , 点  $O$  到底边  $BC$  的距离为  $3$  , 则  $AB$  的长为 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $4\sqrt{5}$  或  $2\sqrt{5}$

【解析】 如图 1,  $OB = 5$ ,  $OD = 3$ , 在  $\text{Rt}\triangle OBD$  中,  $BD = 4$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABD$  中,  $AD = 8$ ,  $AB = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$ .

如图 2,  $OB = 5$ ,  $OD = 3$ , 在  $\text{Rt}\triangle OBD$  中,  $BD = 4$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABD$  中,  $AD = 2$ ,  $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ .

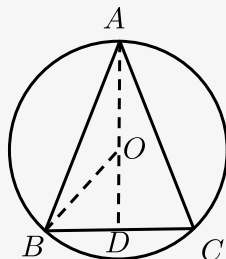


图 1

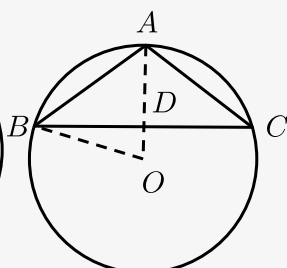


图 2

【标注】 【知识点】 垂径定理的推论以及应用

23. 2020~2021 学年浙江杭州江干区杭州市文海实验学校(中学部)初三上学期期中第 15 题 4 分 ★★★

$\triangle ABC$  内接于  $\odot O$ , 且  $AB = AC$ , 点  $O$  到  $BC$  的距离为 3, 圆的半径为 5, 则  $AB$  的长是 \_\_\_\_\_.

【答案】  $2\sqrt{5}$  或  $4\sqrt{5}$

【解析】 分两种情况考虑:

当  $\triangle ABC$  为锐角三角形时, 如图 1 所示,

过  $A$  作  $AD \perp BC$ , 由题意得到  $AD$  过圆心  $O$ , 连接  $OB$ ,

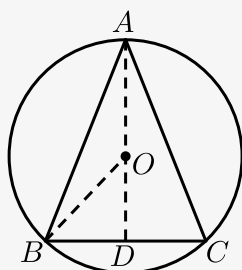


图 1

$\therefore OD = 3$ ,  $OB = 5$ ,

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle OBD$  中, 根据勾股定理得:  $BD = 4$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABD$  中,  $AD = AO + OD = 8$ ,  $BD = 4$ ,

根据勾股定理得:  $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 4\sqrt{5}$ ;

当  $\triangle ABC$  为钝角三角形时, 如图 2 所示,

过  $A$  作  $AD \perp BC$ , 由题意得到  $AD$  延长线过圆心  $O$ , 连接  $OB$ ,

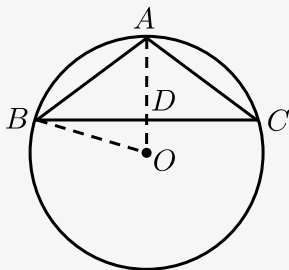


图2

$\because OD = 3, OB = 5,$

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle OBD$  中, 根据勾股定理得:  $BD = 4,$

在  $\text{Rt}\triangle ABD$  中,  $AD = AO - OD = 2, BD = 4,$

根据勾股定理得:  $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 2\sqrt{5},$

综上,  $AB = 2\sqrt{5}$  或  $4\sqrt{5}.$

故答案为:  $2\sqrt{5}$  或  $4\sqrt{5}.$

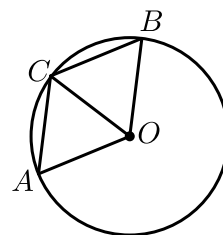
**【标注】**【知识点】垂径定理以及应用

## 二、弧、弦、圆心角关系定理

### 练习6

24. ★★

如图,  $A、B$  是半径为 3 的  $\odot O$  上的两点, 若  $\angle AOB = 120^\circ$ ,  $C$  是  $\widehat{AB}$  的中点, 则四边形  $AOBC$  的周长为 \_\_\_\_\_.



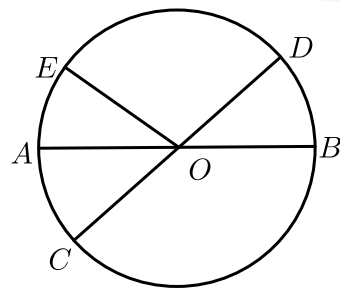
**【答案】** 12

**【解析】** 根据圆心角, 弦, 弧关系定理.

**【标注】**【知识点】弧、弦、圆心角关系

25. 2020~2021学年广东广州越秀区广东实验中学初三上学期期中模拟 (三) 第4题3分 ★★

如图,  $AB, CD$  是  $\odot O$  的直径,  $\widehat{AE} = \widehat{BD}$ , 若  $\angle AOE = 32^\circ$ , 则  $\angle COE$  的度数是 ( ).



A.  $32^\circ$

B.  $60^\circ$

C.  $68^\circ$

D.  $64^\circ$

**【答案】** D

**【解析】**  $\because \widehat{AE} = \widehat{BD}$ ,

$$\therefore \angle BOD = \angle AOE = 32^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BOD = \angle AOC,$$

$$\therefore \angle AOC = 32^\circ,$$

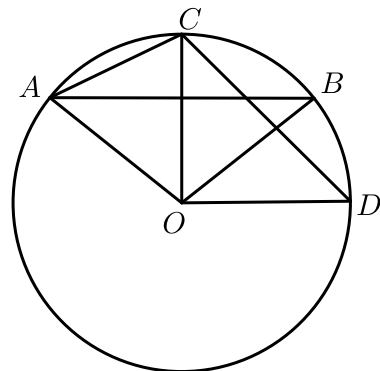
$$\therefore \angle COE = 32^\circ + 32^\circ = 64^\circ.$$

故选 D.

**【标注】**【知识点】弧、弦、圆心角关系

26. ★★

如图，在  $\odot O$  中， $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ，下列结论：①  $AB = CD$ ；②  $AC = BD$ ；③  $\angle AOC = \angle BOD$ ；④  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ ，其中，正确的有（ ）。



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

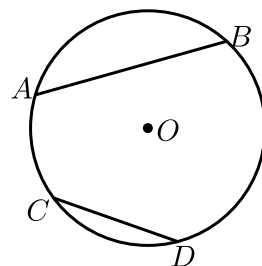
**【答案】** D

**【解析】** 等弧所对的圆心角和弦相等。

**【标注】**【知识点】弧、弦、圆心角关系

27. ★★

如图，在  $\odot O$  中， $AB = 2CD$ ，那么（ ）。



A.  $\widehat{AB} > 2\widehat{CD}$

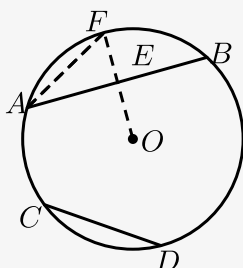
B.  $\widehat{AB} < 2\widehat{CD}$

C.  $\widehat{AB} = 2\widehat{CD}$

D.  $\widehat{AB}$ 与 $2\widehat{CD}$ 的大小关系无法比较

**【答案】** A

**【解析】** 如图，



过O作半径 $OF \perp AB$ 于E，连接AF；

由垂径定理知： $AE = BE$ ， $\widehat{AF} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$ ；

$$\therefore AE = CD = \frac{1}{2}AB;$$

在 $Rt\triangle AEF$ 中， $AF > AE$ ，则 $AF > CD$ ；

$\therefore \widehat{AF} > \widehat{CD}$ ，即 $\widehat{AB} > 2\widehat{CD}$ ；

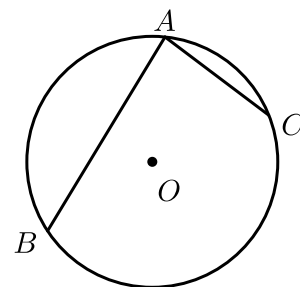
故选：A．

**【标注】**【知识点】弧、弦、圆心角关系

【知识点】垂径定理以及应用

28. 2019~2020学年河北保定清苑县初三上学期期末第4题3分 ★★

如图，在 $\odot O$ 中，如果 $\widehat{AB} = 2\widehat{AC}$ ，那么（ ）．



A.  $AB = AC$

B.  $AB = 2AC$

C.  $AB < 2AC$

D.  $AB > 2AC$

**【答案】** C

【解析】过  $O$  作  $OD \perp AB$  ,

由垂径定理知

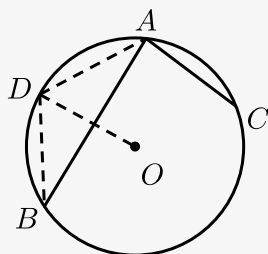
$$\widehat{AD} = \widehat{BD} = \frac{1}{2} \widehat{AB} ,$$

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BD} = \widehat{AD} ,$$

$$\therefore AC = AD = DB .$$

由三边关系知

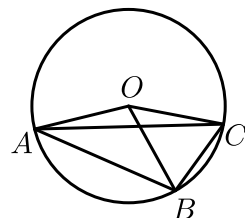
$$AD + DB > AB , \text{ 即 } AB < 2AC .$$



【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

29. 2014~2015学年福建厦门初三上学期期末第10题4分 ★★★

如图,  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  都是  $\odot O$  的半径, 若  $\angle AOB$  是锐角, 且  $\angle AOB = 2\angle BOC$ , 则下列结论正确的是 ( ) .



A.  $AB = 2BC$

B.  $AB < 2BC$

C.  $\angle AOB = 2\angle CAB$

D.  $\angle ACB = 4\angle CAB$

【答案】B

【解析】取  $\widehat{AB}$  的中点  $D$ , 连接  $AD$ ,  $BD$  ,

$$\because \angle AOB = 2\angle BOC ,$$

$$\therefore \widehat{AB} = 2\widehat{BC} ,$$

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{BD} = \widehat{BC} ,$$

$$\therefore AD = BD = BC ,$$

$$\therefore AB < AD + BD ,$$

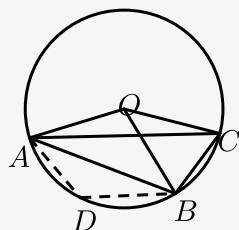
$$\therefore AB < 2BC , \text{ 故 A 错误, B 正确.}$$

$$\because \angle AOB = 2\angle BOC , \angle BOC = 2\angle CAB ,$$

$$\therefore \angle AOB = 4\angle CAB , \text{ 故 C 错误.}$$

$$\because \angle AOB = 2\angle ACB ,$$

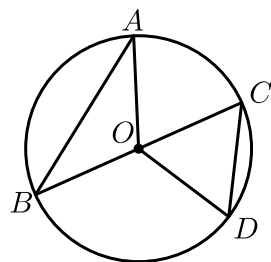
$$\therefore \angle ACB = \angle BOC = 2\angle CAB , \text{ 故 D 错误.}$$



【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

30. 2019~2020学年9月福建福州台江区福州华伦中学初三上学期月考第8题4分 ★★★

如图,  $\odot O$  中, 如果  $\angle AOB = 2\angle COD$ , 那么 ( ) .



A.  $AB = 2CD$

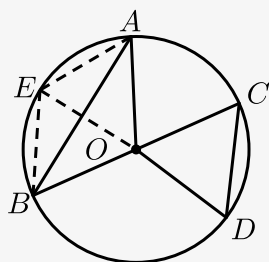
B.  $AB < DC$

C.  $AB < 2DC$

D.  $AB > 2DC$

**【答案】** C

**【解析】** 如图，过点  $O$  作  $OE \perp AB$  交  $\odot O$  于点  $E$ ，连接  $AE$ 、 $BE$ ，



$$\therefore \angle AOE = \angle BOE = \frac{1}{2} \angle AOB,$$

$$\text{又} \because \angle COD = \frac{1}{2} \angle AOB,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle BOE = \angle COD,$$

$$\therefore CD = AE = BE,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ABE \text{ 中, } AE + BE > AB,$$

$$\therefore 2CD > AB.$$

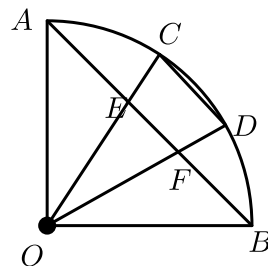
故选 C.

**【标注】** 【知识点】弧、弦、圆心角关系

31. ★★★

如图， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $C$ 、 $D$ 是 $\widehat{AB}$ 的三等分点， $AB$ 分别交 $OC$ 、 $OD$ 于点 $E$ 、 $F$ ，求证：

$$AE = CD.$$

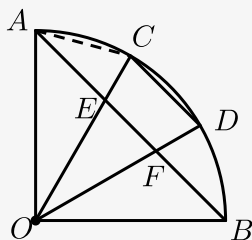


**【答案】** 证明见解析.

**【解析】** 方法一：

$C$ 、 $D$ 是弧  $AB$  的三等分点，则  $\angle AOC = \angle COD = \angle DOB = 30^\circ$ ， $AC = CD = DB$   
 $AO = OB$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ，则  $\angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$   
 $OA = OC$ ， $\angle AOC = 30^\circ$ ，则  $\angle OAC = 75^\circ$ ， $\angle OAB = 45^\circ$ ，则  $\angle BAC = 30^\circ$ ，  
 $\angle ACO = \angle CAO = 75^\circ$ ，则  $\angle AEC = 75^\circ$ ，则三角形  $ACE$  是等腰三角形， $AC = AE$ ，  
 $AC = CD$ ，则  $AE = CD$   
 同理可证  $BF = CD$ ，所以  $AE = BF = CD$ 。

方法二：连结  $AC$ ，利用铺垫的结论证明  $CD \parallel AB$ ，可知  $\angle CEA = \angle C$ ，可证  
 $\angle ACO = \angle DCO$ ， $\therefore \angle ACE = \angle AEC$ ， $\therefore AC = AE$ ， $\because AC = CD$ ， $\therefore AE = CD$ 。



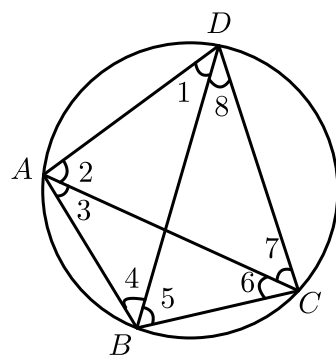
【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

### 三、圆周角定理

#### 练习7

32. ★★

如图，圆内接四边形  $ABCD$  的对角线  $AC$ ， $BD$  把它的 4 个内角分成 8 个角，在这些角中， $\angle 1 =$  \_\_\_\_\_， $\angle 2 =$  \_\_\_\_\_， $\angle 3 =$  \_\_\_\_\_， $\angle 4 =$  \_\_\_\_\_。（填  $\angle 5$ ； $\angle 6$ ； $\angle 7$ ； $\angle 8$ ）



【答案】  $\angle 6$ ； $\angle 5$ ； $\angle 8$ ； $\angle 7$

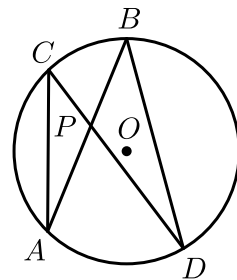
【解析】  $\angle 2 = \angle 6$ ， $\angle 2 = \angle 5$ ，  
 $\angle 3 = \angle 8$ ， $\angle 4 = \angle 7$ 。

【标注】【知识点】圆内接四边形综合



33. 2017~2018学年10月浙江台州椒江区书生中学初三上学期月考第8题4分 ★★

如图， $\odot O$ 中，弦  $AB$ 、 $CD$  相交于点  $P$ ，若  $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle APD = 70^\circ$ ，则  $\angle B$  等于（ ）。



A.  $30^\circ$

B.  $35^\circ$

C.  $40^\circ$

D.  $50^\circ$

**【答案】** C

**【解析】** 方法一：同弧所对的圆周角相等，

$$\therefore \angle D = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BPD = 180^\circ - \angle APD = 110^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle BPD \text{ 中, } \angle B = 180^\circ - \angle BPD - \angle D = 40^\circ.$$

故选 C.

$$\text{方法二: } \because \angle A = 30^\circ, \angle APD = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle APD - \angle A = 40^\circ,$$

$\therefore \angle B$  与  $\angle C$  是  $\widehat{AD}$  对的圆周角，

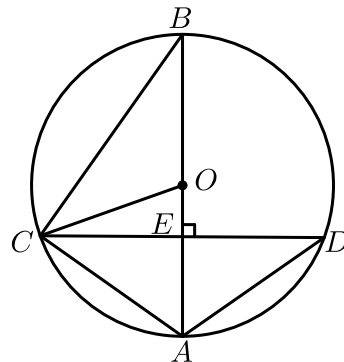
$$\therefore \angle B = \angle C = 40^\circ.$$

故选 C.

**【标注】** 【知识点】圆周角定理的推论

34. 2019~2020学年安徽黄山初三上学期期末第19题10分 ★★

如图， $AB$  是  $\odot O$  的直径， $CD$  是  $\odot O$  的一条弦，且  $CD \perp AB$  于点  $E$ 。



(1) 求证： $\angle BCO = \angle D$ 。

(2) 若  $CD = 4\sqrt{2}$ ， $AE = 2$ ，求  $\odot O$  的半径。

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 3.

【解析】(1)  $\because OC = OB$ ,

$$\therefore \angle BCO = \angle B.$$

$$\because \widehat{AC} = \widehat{AC},$$

$$\therefore \angle B = \angle D,$$

$$\therefore \angle BCO = \angle D.$$

(2)  $\because AB$  是  $\odot O$  的直径,  $CD \perp AB$ ,

$$\therefore CE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle OCE \text{ 中, } OC^2 = CE^2 + OE^2,$$

$$\text{设 } \odot O \text{ 的半径为 } r, \text{ 则 } OC = r, OE = OA - AE = r - 2,$$

$$\therefore r^2 = (2\sqrt{2})^2 + (r - 2)^2,$$

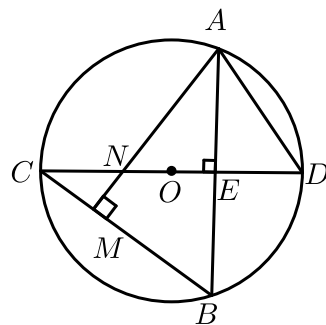
$$\text{解得: } r = 3,$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 3.$$

【标注】【知识点】圆周角定理的推论

35. 2019~2020学年天津东丽区初三上学期期末第18题3分 ★★★

如图,  $\odot O$  中, 直径  $CD \perp$  弦  $AB$  于  $E$ ,  $AM \perp BC$  于  $M$ , 交  $CD$  于  $N$ , 连接  $AD$ .



(1) 求证:  $AD = AN$ .

(2) 若  $AB = 8$ ,  $ON = 1$ , 求  $\odot O$  的半径.

【答案】(1) 证明见解析.

(2)  $\frac{13}{3}$ .

【解析】(1)  $\because CD \perp AB$ ,  $\therefore \angle CEB = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle C + \angle B = 90^\circ$ ,

$$\text{同理 } \angle C + \angle CNM = 90^\circ, \therefore \angle CNM = \angle B,$$

$$\because \angle CNM = \angle AND, \therefore \angle AND = \angle B,$$

$$\because \widehat{AC} = \widehat{AC}, \therefore \angle D = \angle B, \therefore \angle AND = \angle D,$$

$$\therefore AN = AD.$$



【解析】 $\because BC \perp OA$ ,

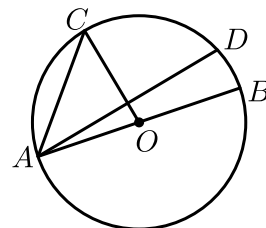
$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{AC},$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle ADB = 2 \times 28^\circ = 56^\circ.$$

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

37. 2019~2020学年天津河西区天津市培杰中学初三上学期期末第6题3分 ★★

如图， $AB$ 为 $\odot O$ 的直径， $C, D$ 为 $\odot O$ 上的两点，且 $C$ 为 $\widehat{AD}$ 的中点，若 $\angle BAD = 20^\circ$ ，则 $\angle ACO$ 的度数为（ ）.



A.  $30^\circ$

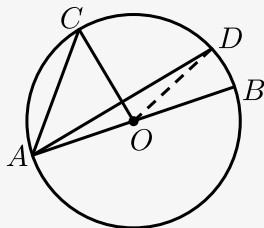
B.  $45^\circ$

C.  $55^\circ$

D.  $60^\circ$

【答案】C

【解析】连接  $OD$ ,



$$\therefore \angle BOD = 2\angle BAD = 2 \times 20^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 180^\circ - \angle BOD = 140^\circ,$$

$\because C$ 是 $\widehat{AD}$ 中点,

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{CD},$$

$$\therefore \angle AOC = \angle COD,$$

$$\therefore \angle AOC + \angle COD = \angle AOD = 140^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 70^\circ,$$

$$\because OC = OA,$$

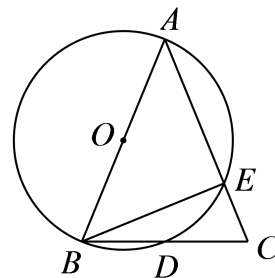
$$\therefore \angle ACO = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ.$$

故选 C.

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

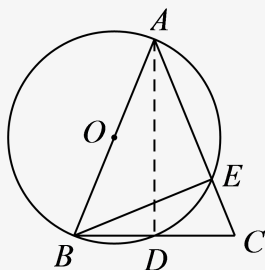
38. 2019~2020学年10月北京海淀区玉渊潭中学初三上学期月考第15题3分 ★★

如图， $AB$ 是 $\odot O$ 的直径， $AB = AC$ ， $BC$ 交 $\odot O$ 于点 $D$ ， $AC$ 交 $\odot O$ 于点 $E$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ，给出下列五个结论：①  $\angle EBC = 22.5^\circ$ ；②  $BD = DC$ ；③  $AE = 2EC$ ；④ 劣弧 $AE$ 是劣弧 $DE$ 的2倍；⑤  $AE = BC$ ．其中正确结论的序号是 \_\_\_\_\_ ．



**【答案】** ①②④

**【解析】** 方法一：连接 $AD$ ， $AB$ 是 $\odot O$ 的直径，则 $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$ ，



$\because AB = AC$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle ABE = 45^\circ$ ， $\angle C = \angle ABC = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67.5^\circ$ ， $AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore AE = BE$ ， $\angle EBC = 90^\circ - 67.5^\circ = 22.5^\circ$ ， $DB = CD$ ，故②正确，

$\therefore \angle ABE = 45^\circ$ ， $\angle EBC = 22.5^\circ$ ，故①正确，

$\therefore AE = BE$ ，

$\therefore \widehat{AE} = \widehat{BE}$ ，

又 $AD$ 平分 $\angle BAC$ ，所以，即劣弧 $AE$ 是劣弧 $DE$ 的2倍，④正确．

$\therefore \angle EBC = 22.5^\circ$ ， $BE \perp CE$ ，

$\therefore BE > 2EC$ ，

$\therefore AE > 2EC$ ，故③错误．

$\therefore \angle BEC = 90^\circ$ ，

$\therefore BC > BE$ ，

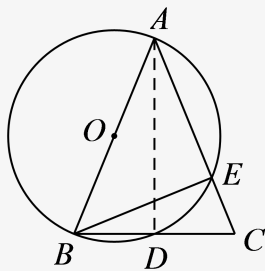
又 $\because AE = BE$ ，

$\therefore BC > AE$

故⑤错误．

故答案为：①②④．

方法二：连接 $AD$ ， $AB$ 是直径，



则  $AD \perp BC$  ,

又  $\because \triangle ABC$  是等腰三角形 ,

故点  $D$  是  $BC$  的中点 , 即  $BD = CD$  , 故②正确 ;

$\therefore AD$  是  $\angle BAC$  的平分线 ,

由圆周角定理知 ,  $\angle EBC = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 22.5^\circ$  , 故①正确 ;

$\therefore \angle ABE = 90^\circ - \angle EBC - \angle BAD = 45^\circ = 2\angle CAD$  , 故④正确 ;

$\therefore \angle EBC = 22.5^\circ$  ,  $2EC \neq BE$  ,  $AE = BE$  ,  $\therefore AE \neq 2CE$  , ③不正确 ;

$\therefore AE = BE$  ,  $BE$  是直角边 ,  $BC$  是斜边 , 肯定不等 , 故⑤错误 .

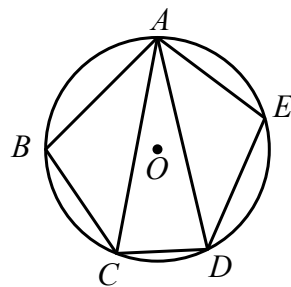
综上所述 , 正确的结论是 : ①②④ .

故答案为 : ①②④ .

**【标注】** 【知识点】 圆周角定理以及应用

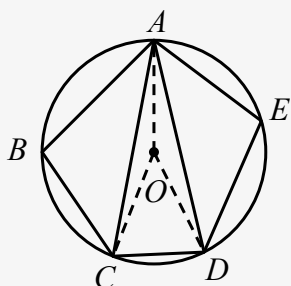
39. 2017~2018学年10月江苏南京栖霞区南京师范大学附属中学仙林学校初三下学期月考第14题 ★★

如图 , 在  $\odot O$  的内接五边形  $ABCDE$  中 ,  $\angle CAD = 35^\circ$  , 则  $\angle B + \angle E = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$  .



**【答案】** 215

**【解析】** 如图 , 连接  $OC$ 、 $OD$ 、 $OA$  ,



$\therefore \angle CAD = 35^\circ$  ,

$\angle CAD$ 为弧 $CD$ 所对圆周角.

$$\therefore \angle COD = 70^\circ.$$

$$\text{又 } \angle B = \frac{1}{2}(\angle COD + \angle AOD),$$

$$\angle E = \frac{1}{2}(\angle COD + \angle AOC),$$

$$\therefore \angle B + \angle E = \angle COD + \frac{1}{2}(\angle AOD + \angle AOC)$$

$$= \angle COD + \frac{1}{2}(360^\circ - \angle COD)$$

$$= 70^\circ + 145^\circ$$

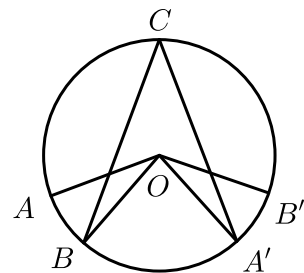
$$= 215^\circ.$$

$$\therefore \angle B + \angle E = 180^\circ + 35^\circ = 215^\circ.$$

**【标注】**【知识点】圆内接正多边形相关计算

40. 2018~2019学年10月江苏南京浦口区南京市浦口外国语学校初三上学期月考第14题2分 ★★

如图, 点 $C$ 在 $\odot O$ 上, 将圆心角 $\angle AOB$ 绕点 $O$ 按逆时针方向旋转到 $\angle A'OB'$ , 旋转角为 $\alpha$ , ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ). 若 $\angle AOB = 30^\circ$ ,  $\angle BCA' = 40^\circ$ , 则 $\angle \alpha =$  \_\_\_\_\_.



**【答案】**  $110^\circ$

**【解析】**  $\because \angle BCA' = 40^\circ$ ,  $\angle AOB = 30^\circ$ ,

$$\therefore \angle BOA' = 2\angle BCA' = 80^\circ,$$

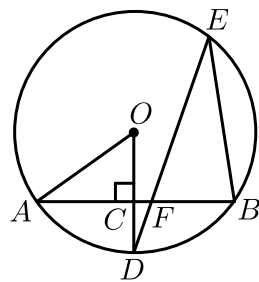
$$\therefore \angle \alpha = \angle AOB + \angle BOA' = 110^\circ.$$

故答案为:  $110^\circ$ .

**【标注】**【知识点】圆周角定理以及应用

41. 2018~2019学年江苏盐城江苏省盐城中学初三上学期期末第23题8分 ★★★

如图,  $AB$ 是 $\odot O$ 的一条弦,  $OD \perp AB$ , 垂足为点 $C$ , 交 $\odot O$ 于点 $D$ , 点 $E$ 在 $\odot O$ 上.



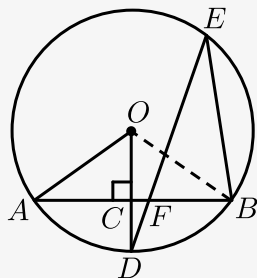
( 1 ) 若  $\angle AOD = 50^\circ$  , 求  $\angle DEB$  的度数 .

( 2 ) 若  $OC = 6$  ,  $OA = 10$  , 求  $AB$  的长 .

**【答案】** ( 1 )  $25^\circ$  .

( 2 ) 16 .

**【解析】** ( 1 ) 连接  $OB$  ,



$\because AB$  是  $\odot O$  的一条弦 ,  $OD \perp AB$  于点  $C$  ,  
交  $\odot O$  于点  $D$  ,

$\therefore \widehat{AD} = \widehat{BD}$  ,

$\therefore \angle BOD = \angle AOD = 50^\circ$  ,

$\because \angle BED$  是  $\widehat{BD}$  所对的圆周角 ,  $\angle BOD$  是  $\widehat{BD}$  所对的圆心角 ,

$\therefore \angle BED = \frac{1}{2} \angle BOD = \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ$  ,

$\therefore \angle BED$  的度数是  $25^\circ$  .

( 2 )  $\because AB$  是  $\odot O$  的一条弦 ,  $OD \perp AB$  于点  $C$  ,

$\therefore \angle OCA = 90^\circ$  ,  $AC = BC$  ,

$\therefore AB = 2AC$  ,

在  $\text{Rt}\triangle OAC$  中 , 根据勾股定理得 :

$$OA^2 = OC^2 + AC^2 ,$$

$\because OA = 10$  ,  $OC = 6$  ,

$$10^2 = 6^2 + AC^2 ,$$

$\therefore 100 = 36 + AC^2$  ,

$$AC^2 = 100 - 36 = 64 ,$$

$\therefore AC = 8$  ,

$\therefore AB = 2AC = 2 \times 8 = 16$  ,



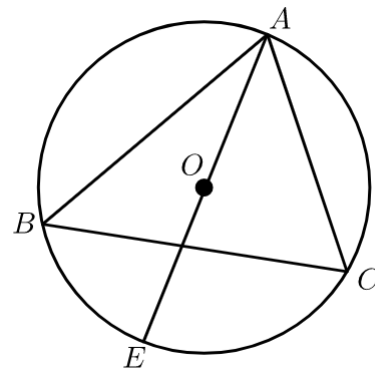
∴弦  $AB$  的长为 16 .

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

### 练习9

42. ★★★

如图,  $\odot O$  的直径  $AE = 10\text{cm}$ ,  $\angle B = \angle EAC$ .  $AC$  的长为 \_\_\_\_\_ .



【答案】  $5\sqrt{2}$

【解析】连接  $EC$ ,

∵  $\angle E$  与  $\angle B$  是  $\widehat{AC}$  对的圆周角,

∴  $\angle E = \angle B$ ,

∵  $\angle B = \angle EAC$ ,

∴  $\angle E = \angle EAC$ ,

∵  $AE$  是  $\odot O$  的直径,

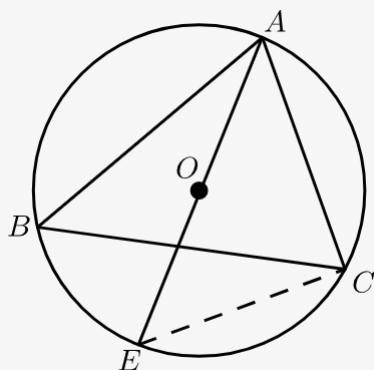
∴  $\angle ACE = 90^\circ$ ,

∴  $\angle E = \angle EAC = 45^\circ$ ,

∵  $AE = 10\text{cm}$ ,

∴  $AC = AE \cdot \sin 45^\circ = 5\sqrt{2}(\text{cm})$ .

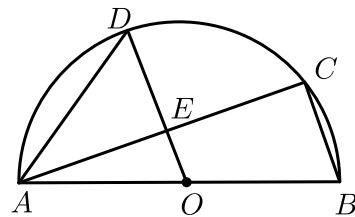
∴  $AC$  的长为  $5\sqrt{2}\text{cm}$ .



【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

43. 2020~2021学年浙江杭州上城区北京师范大学附属杭州中学初三上学期期中第20题10分 ★★★

如图， $AB$ 是半圆 $O$ 的直径， $C$ 、 $D$ 是半圆 $O$ 上的两点，且 $OD \parallel BC$ ， $OD$ 与 $AC$ 交于点 $E$ 。



- (1) 若 $\angle B = 70^\circ$ ，求 $\angle CAD$ 的度数。  
 (2) 若 $AB = 4$ ， $AC = 3$ ，求 $DE$ 的长。

**【答案】** (1)  $35^\circ$ 。

(2)  $2 - \frac{\sqrt{7}}{2}$ 。

**【解析】** (1)  $\because AB$ 是半圆 $O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because OD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AEO = 90^\circ, \text{即 } OE \perp AC,$$

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ, \angle AOD = \angle B = 70^\circ,$$

$$\because OA = OD,$$

$$\therefore \angle DAO = \angle ADO = \frac{180^\circ - \angle AOD}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle DAO - \angle CAB = 55^\circ - 20^\circ = 35^\circ.$$

(2) 在直角 $\triangle ABC$ 中， $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ ，

$$\because OE \perp AC,$$

$$\therefore AE = EC,$$

$$\text{又} \because OA = OB,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\text{又} \because OD = \frac{1}{2}AB = 2,$$

$$\therefore DE = OD - OE = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

**【标注】**【知识点】圆与勾股

44. 2020~2021学年天津红桥区初三上学期期末第21题10分 ★★★

已知 $\odot O$ 的直径为10，点 $A$ ，点 $B$ ，点 $C$ 在 $\odot O$ 上， $\angle CAB$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 $D$ 。

- (1) 如图①，若 $BC$ 为 $\odot O$ 的直径， $AB = 6$ ，求 $AC$ ， $BD$ ， $CD$ 的长。

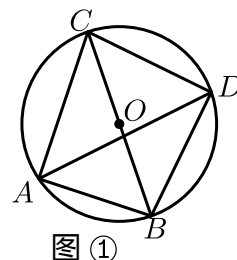


图 ①

( 2 ) 如图②, 若  $\angle CAB = 60^\circ$ , 求  $BD$  的长.

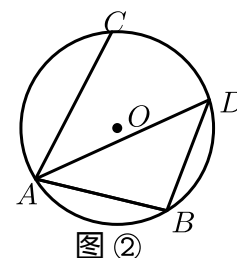


图 ②

**【答案】** ( 1 )  $AC = 8$ ,  $BD = CD = 5\sqrt{2}$ .

( 2 ) 5.

**【解析】** ( 1 ) 如图①,  $\because BC$  是  $\odot O$  的直径,

$$\therefore \angle CAB = \angle BDC = 90^\circ.$$

$$\because \text{在直角 } \triangle CAB \text{ 中, } BC = 10, AB = 6,$$

$$\therefore \text{由勾股定理得到: } AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

$$\because AD \text{ 平分 } \angle CAB,$$

$$\therefore \widehat{CD} = \widehat{BD},$$

$$\therefore CD = BD.$$

$$\text{在直角 } \triangle BDC \text{ 中, } BC = 10, CD^2 + BD^2 = BC^2,$$

$$\therefore \text{易求 } BD = CD = 5\sqrt{2}.$$

( 2 ) 如图②, 连接  $OB$ ,  $OD$ .

$$\because AD \text{ 平分 } \angle CAB, \text{ 且 } \angle CAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = \frac{1}{2} \angle CAB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DOB = 2\angle DAB = 60^\circ.$$

$$\text{又 } \because OB = OD,$$

$$\therefore \triangle OBD \text{ 是等边三角形,}$$

$$\therefore BD = OB = OD.$$

$$\because \odot O \text{ 的直径为 } 10, \text{ 则 } OB = 5,$$

$$\therefore BD = 5.$$

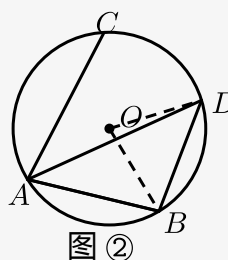
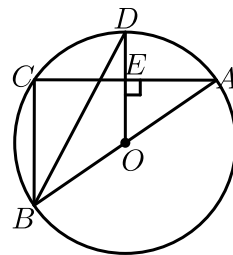


图 ②

**【标注】**【知识点】圆与勾股

如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， $AB$ 是 $\odot O$ 的直径， $D$ 为 $\odot O$ 上一点， $OD \perp AC$ ，垂足为 $E$ ，连接 $BD$ 。



(1) 求证： $BD$ 平分 $\angle ABC$ 。

(2) 当 $\angle ODB = 30^\circ$ 时，求证： $BC = OD$ 。

**【答案】** (1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

**【解析】** (1)  $\because OD \perp AC$ ， $OD$ 为 $\odot O$ 半径，

$$\therefore \widehat{CD} = \widehat{AD}$$

$$\therefore \angle CBD = \angle ABD,$$

$$\therefore BD \text{ 平分 } \angle ABC.$$

(2)  $\because OB = OD$ ,

$$\therefore \angle OBD = \angle ODB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle OBD + \angle ODB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ,$$

又 $\because OD \perp AC$ 于 $E$ ,

$$\therefore \angle OEA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle OEA - \angle AOD = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

又 $\because AB$ 为圆 $O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACB \text{ 中, } BC = \frac{1}{2}AB,$$

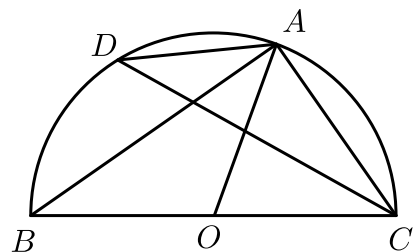
$$\because OD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore BC = OD.$$

**【标注】**【知识点】圆周角定理以及应用

46. 2019~2020学年10月北京海淀区首师大二附中初三上学期周测C卷第15题 ★★★

如图， $A$ 、 $D$ 是半圆上的两点， $O$ 为圆心， $BC$ 是直径， $\angle D = 35^\circ$ ，求 $\angle OAC$ 的度数。



**【答案】**  $\angle OAC$  的度数为  $55^\circ$  .

**【解析】** 解法一：

$$\because \angle D = 35^\circ ,$$

$$\therefore \angle B = \angle D = 35^\circ .$$

$\because BC$  是直径 ,

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ .$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ - \angle ABC = 55^\circ .$$

$$\because OA = OC ,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA = 55^\circ .$$

解法二：

$$\because \angle D = 35^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle D = 70^\circ .$$

$$\because OA = OC ,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA ,$$

$$\because \angle OAC + \angle OCA + \angle AOC = 180^\circ ,$$

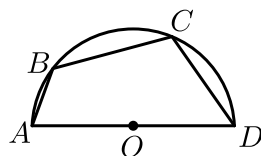
$$\therefore \angle OAC = 55^\circ .$$

**【标注】** 【知识点】 圆周角定理以及应用

## 练习10

47. 2019年陕西西安碑林区西安交通大学附属中学初三中考一模第9题3分 ★★★

如图， $AD$  是半圆的直径，点  $C$  是  $\widehat{BD}$  的中点， $\angle ADC = 55^\circ$ ，则  $\angle BAD$  等于（ ）.



A.  $50^\circ$

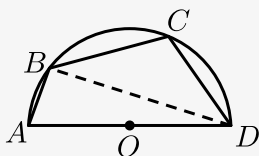
B.  $55^\circ$

C.  $65^\circ$

D.  $70^\circ$

**【答案】** D

**【解析】** 连接  $BD$  ,

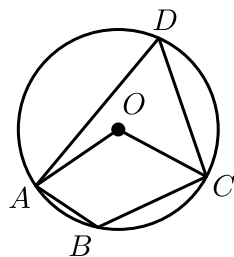


$\because$  四边形  $ABCD$  为圆的内接四边形 ,  
 $\therefore \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$  ,  $\angle ABC = 180^\circ - \angle ADC = 125^\circ$  ,  
 $\because AD$  为直径 ,  
 $\therefore \angle ABD = 90^\circ$  ,  
 $\therefore \angle CBD = 35^\circ$  ,  
 $\because C$  为  $\widehat{BD}$  中点 ,  
 $\therefore \widehat{BC} = \widehat{CD}$  ,  
 $\therefore BC = CD$  ,  
 $\therefore \angle CBD = \angle BDC = 35^\circ$  ,  
 $\therefore \angle ADB = 20^\circ$  ,  
 $\therefore \angle BAD = 70^\circ$  .  
 故选 D .

**【标注】**【知识点】圆内接四边形综合

48. 2016年浙江杭州上城区初三中考一模第15题4分 ★★★

如图, 已知四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ , 点  $O$  在  $\angle D$  的内部,  $\angle OAD + \angle OCD = 50^\circ$ , 则  $\angle B =$  \_\_\_\_\_ .



**【答案】**  $130^\circ$

**【解析】**  $\because$  四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$  ,  
 $\therefore \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$  ,  $\angle B + \angle D = 180^\circ$  ,  $\angle AOC = 2\angle D$  ,  
 $\because \angle OAD + \angle OCD = 50^\circ$  ,  
 $\therefore \angle OAB + \angle OCB = 130^\circ$  .  
 设  $\angle D = x$  , 则  $\angle B = 180^\circ - x$  ,  $\angle AOC = 2x$  .  
 在四边形  $OABC$  中 ,  
 $\therefore \angle OAB + \angle OCB + \angle B + \angle AOC = 360^\circ$  ,

$$\therefore 130^\circ + 180^\circ - x + 2x = 360^\circ ,$$

$$\therefore x = 50^\circ ,$$

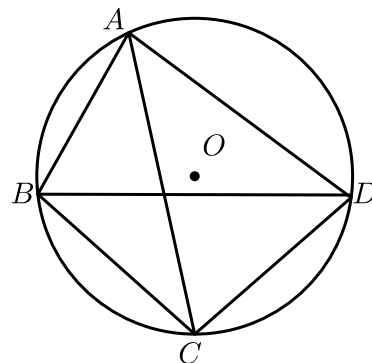
$$\therefore \angle B = 180^\circ - x = 130^\circ .$$

故答案为  $130^\circ$  .

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

49. 2015~2016学年北京东城区北京六十五中初三上学期期中第14题3分 ★★

如图，四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ， $\angle BCD = 100^\circ$ ， $AC$  平分  $\angle BAD$ ，则  $\angle BAC$  的度数为 \_\_\_\_\_ .



【答案】  $40^\circ$

【解析】  $\because$  四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ， $\angle BCD = 100^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ .$$

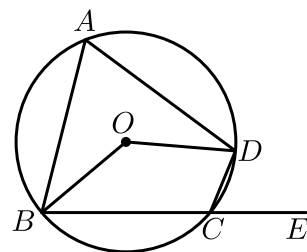
$\because AC$  平分  $\angle BAD$ ，

$$\therefore \angle BAC \text{ 的度数为 } 40^\circ .$$

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

50. 2019~2020学年12月天津河西区天津市海河中学初三上学期月考第8题3分 ★★

如图，四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ，如果它的一个外角  $\angle DCE = 64^\circ$ ，那么  $\angle BOD = ( \quad )$  .



A.  $128^\circ$

B.  $100^\circ$

C.  $64^\circ$

D.  $32^\circ$

【答案】 A

【解析】  $\because$  四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ，

$$\therefore \angle A = \angle DCE = 64^\circ ,$$

$$\therefore \angle BOD = 2\angle A = 128^\circ .$$

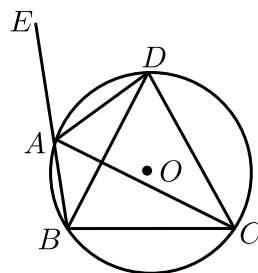
故选 A .

【标注】【知识点】圆内接四边形综合

51. 2018~2019学年10月江苏南京鼓楼区南京市第二十九中学初三上学期月考第20题7分 ★★★

如图，四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ， $\angle DAE$  是四边形  $ABCD$  的一个外角，且  $AD$  平分  $\angle CAE$  . 求证：

$$DB = DC .$$



【答案】证明见解析 .

【解析】 $\because \angle DAC$  与  $\angle DBC$  是同弧所对的圆周角，

$$\therefore \angle DAC = \angle DBC .$$

$\because AD$  平分  $\angle CAE$ ，

$$\therefore \angle EAD = \angle DAC ,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle DBC .$$

$\because$  四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ，

$$\therefore \angle EAD = \angle BCD ,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DCB ,$$

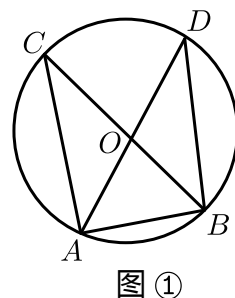
$$\therefore DB = DC .$$

【标注】【知识点】圆内接四边形综合

52. 2016~2017学年江苏南京玄武区初三上学期期末第22题8分 ★★★

如图，已知  $\odot O$  的直径为 10，点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  在  $\odot O$  上， $\angle CAB$  的平分线交  $\odot O$  于点  $D$  .

( 1 ) 图①，当  $BC$  为  $\odot O$  的直径时，求  $BD$  的长 .





( 2 ) 图② , 当  $BD = 5$  时 , 求  $\angle CDB$  的度数 .

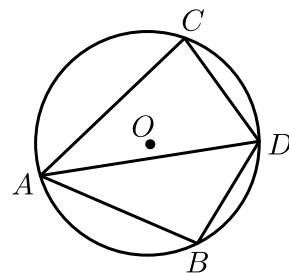
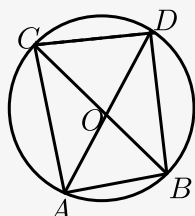


图 ②

【答案】 ( 1 )  $BD = 5\sqrt{2}$

( 2 )  $\angle CDB = 120^\circ$  .

【解析】 ( 1 ) 连接  $CD$  ,



图①

$\because BC$  为  $\odot O$  直径 ,

$\therefore \angle CDB = \angle CAB = 90^\circ$  ,

$\because AD$  是  $\angle CAB$  的角平分线 ,

$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2} \angle CAB = 45^\circ$  ,

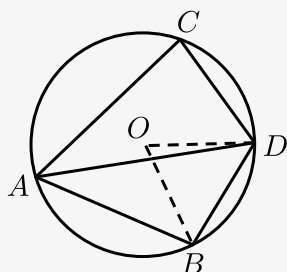
$\therefore \angle DBC = \angle DAC = 45^\circ$  ,

$\therefore \triangle DBC$  为等腰直角三角形 ,

$\because BC = 10$  ,

$\therefore BD = 5\sqrt{2}$  .

( 2 ) 连接  $OD$ 、 $OB$  ,



$\because \odot O$  直径为 10 ,

$\therefore OB = OD = 5$  ,

$\therefore BD = 5$  ,

$\therefore OB = OD = BD$  ,

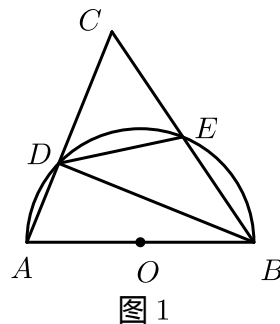
$\therefore \triangle OBD$  是等边三角形 ,  
 $\therefore \angle BOD = 60^\circ$  ,  
 $\therefore \widehat{CD} = \widehat{DB}$  ,  
 $\therefore \angle CAD = \angle BAD = 30^\circ$  ,  
 $\therefore \angle BAC = 60^\circ$  ,  
 $\therefore$  四边形  $CABD$  是圆内接四边形 ,  
 $\therefore \angle CDB + \angle BAC = 180^\circ$  ,  
 $\therefore \angle CDB = 120^\circ$  .

**【标注】**【知识点】圆内接四边形综合

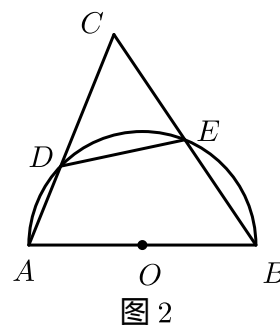
53. 2018~2019学年天津河西区初三上学期期中第22题10分 ★★

已知 ,  $\triangle ABC$  中 ,  $\angle A = 68^\circ$  , 以  $AB$  为直径的  $\odot O$  与  $AC$  ,  $BC$  的交点分别为  $D$  ,  $E$  .

( 1 ) 如图 1 , 求  $\angle CED$  的大小 .



( 2 ) 如图 2 , 当  $DE = BE$  时 , 求  $\angle C$  的大小 .



**【答案】** ( 1 )  $\angle CED = 68^\circ$

( 2 )  $\angle C = 56^\circ$  .

**【解析】** ( 1 )  $\therefore$  四边形  $ABED$  是圆内接四边形 ,

$\therefore \angle A + \angle DEB = 180^\circ$  ,  
 $\therefore \angle CED + \angle DEB = 180^\circ$  ,  
 $\therefore \angle CED = \angle A$  ,  
 $\therefore \angle A = 68^\circ$  ,

$$\therefore \angle CED = 68^\circ$$

( 2 ) 如图所示, 连接  $AE$ ,

$$\therefore DE = BE,$$

$$\therefore \widehat{DE} = \widehat{BE},$$

$\therefore$

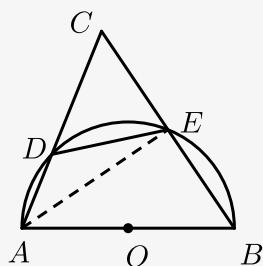


图 2

$$\angle DAE = \angle EAB = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 68^\circ = 34^\circ,$$

$\therefore AB$  为直径,

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle AEC = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ - \angle DAE = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ.$$

**【标注】**【知识点】圆内接四边形综合